ÁLGEBRAS NORMADAS ESPECIAIS E OS NÚMEROS OCTÔNIOS

José Kenedy Martins

Resumo

Neste trabalho apresentamos uma abordagem alternativa mais simplificada para a caracterização das álgebras normadas e obtemos os números octônios como uma álgebra normada caracterizada por algumas propriedades algébricas tais como não-associatividade e alternada. Além disso, ilustramos o processo de Cayley-Dickson para construção de novas álgebras e exemplificamos como o grupo de Lie excepcional G_2 pode ser visto como grupo dos automorfismos da álgebra dos octônios.

Abstract

In this piece of work, we introduce a different more direct approach for a characterization of normed algebras. By doing this, the octonions or Cayley numbers are obtained as a particular normed algebra endowed with certain features such as non-associative and alternate multiplicative law. Moreover, the Cayley-Dickson construction process of normed algebras is revisited and the excepcional Lie group G_2 is introduced as the automorphism group of the octonions algebra.

Palavras Chaves: Álgebras normadas, Octônios, Números de Cayley, Grupo de Lie Excepcional G_2.

O processo de Cayley-Dickson para construção das álgebras normadas é bem conhecido. Entretanto fazemos aqui uma apresentação mais objetiva deste processo. Neste caminho naturalmente obtemos os números complexos, quatérnios e octônios como álgebras decorrentes. Algumas das propriedades destas álgebras são revistas. Focalizamos nossa atenção principalmente na multiplicação natural definida para os octônios e vemos como esta induz um produto vetorial em $\mathbb{R}^7$. O grupo de automorfismos G_2 que preserva este produto vetorial é detalhado em algumas de suas propriedades algébricas e geométricas.

Definição 1 *Uma* **algebra** *é um espaço vetorial real V munido de uma operação interna de multiplicação, não necessariamente associativa e com elemento unidade*

$1 \in V$. *Uma* **álgebra normada** B *é uma álgebra dotada de produto interno* $\langle ., . \rangle$ *tal que*

$$|xy| = |x||y| \quad \forall x, y \in B$$

onde $|x| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$.

Temos associados à álgebra B, os conjuntos $\Re B = \operatorname{span}\{1\} = \{\lambda.1/\lambda \in \mathbb{R}\} \subseteq B$ e $\Im B = (\Re B)^{\perp}$ que chamaremos respectivamente de parte real e parte imaginária de B. Além disso, para cada elemento $x = \Re x + \Im x$, consideramos o seu elemento conjugado complexo definido por $\overline{x} = \Re x - \Im x$. Desse modo, podemos também escrever:

$$\Re x = \frac{x + \overline{x}}{2} \ \text{ e } \ \Im x = \frac{x - \overline{x}}{2}.$$

Observamos que para o caso da álgebra dos números complexos $B = \mathbb{C}$ temos $\Im(x + iy) = iy$ e não o que usualmente consideramos y !.

Uma simples manipulação com as definições acima nos permite obter as seguintes propriedades algébricas elementares relativas aos conjugados em álgebras normadas:

(i) Para cada elemento $x \in B$, tem-se $\overline{\overline{x}} = x$;

(ii) Para quaisquer $x, y \in B$, tem-se $\overline{xy} = \bar{y}\bar{x}$. Em particular para $B = \mathbb{C}$ vale $\overline{zw} = \bar{w}\ \bar{z} = \bar{z}\bar{w}$. Entretanto, é bom ressaltar que álgebras normadas de dimensão maior deixam de ser comutativas;

(iii) Para quaisquer $x, y \in B$ tem-se $\langle x, y \rangle = \Re(x\overline{y}) = \frac{1}{2}(x\overline{y} + y\overline{x})$

Proposição 1 *Considere B uma álgebra normada. Então*

- *Para cada elemento não-nulo $x \in B$ existe um único inverso à esquerda e à direira $x^{-1} = \frac{\overline{x}}{|x|^2}$;*
- *Para quaisquer $x, y \in B$ com $x \neq 0$, as equações $xw = y$ e $wx = y$ podem ser resolvidas de modo único em w com soluções respectivamente iguais a $w = \frac{\overline{x}y}{|x|^2}$ e $w = \frac{y\overline{x}}{|x|^2}$.*
- *A álgebra B é* **fracamente associativa***, ou seja, $(xy)z - x(yz)$ são alternados em x, y, z.*

Vejamos agora um processo bem conhecido de construção de álgebras normadas usualmente chamado de Processo de Cayley-Dickson.

Proposição 2 *Considere uma subálgebra $A \subset B$, $\epsilon \in A^{\perp}$, $|\epsilon| = 1$. Então $A\epsilon \perp A$ e*

$$(a + b\epsilon)(c + d\epsilon) = (ac - \bar{d}b) + (da + b\overline{c})\epsilon \quad \forall a, b, c, d \in A.$$

Exemplo 1 $A = \mathbb{R}$, $B = \mathbb{C}$, $\epsilon = i$,

$$(a + bi)(c + di) = (ac - db) + (da + bc)i.$$

Observação 1 *$\epsilon \in A^{\perp} \subset \Im B$ pois $1 \in A$. Assim, $\bar{\epsilon} = -\epsilon$ e $\epsilon^2 = -1$ uma vez que*

$$1 = |\epsilon|^2 = \epsilon\bar{\epsilon} = \epsilon(-\epsilon) = -\epsilon^2.$$

Definição 2 *Seja A uma álgebra. Considere definida num espaço vetorial $B := A \oplus A$ a seguinte multiplicação*

$$(a, b)(c, d) := (ac - \bar{d}b, da + b\bar{c}).$$

Então isto transforma B em uma álgebra, que dizemos ter sido obtida de A através do **Processo de Cayley-Dickson**.

Observação 2 *Para uma subálgebra $A \subset B$, a álgebra $A + \epsilon A$ é isomorfa a $A \oplus A$.*

Definição 3

- $\mathbb{C} = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$, **os números complexos**;
- $\mathbb{H} = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$, **os números quatérnios**;
- $\mathbb{O} = \mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$,**os números de Cayley ou Octônios**.

Consideramos os números octônios $\{1, i, j, k, e, ie, je, ke\}$ como uma base canônica para $\mathbb{O}$. Onde, $\mathbb{C} = \mathbb{R} + i.\mathbb{R}$, $\mathbb{H} = \mathbb{C} + j.\mathbb{C}$, $\mathbb{O} = \mathbb{H} + e.\mathbb{H}$.

Observação 3 *Uma álgebra é dita* **alternada** *se o sinal da expressão $(xy)z - x(yz)$ é invertido com a troca das posições das variáveis x, y, z. Uma álgebra normada é alternada e trivialmente álgebras associativas são alternadas.*

Proposição 3 *Considere $B = A \oplus A$, então:*

1. *A álgebra B é comutativa se e somente se $A = \mathbb{R}$;*
2. *A álgebra B é associativa se e somente se A é comutativa;*
3. *A álgebra B é alternada se e somente se A é associativa.*

Exemplo 2 *A álgebra $\mathbb{C}$ é comutativa e associativa. A álgebra $\mathbb{H}$ é associativa e comutativa. A álgebra $\mathbb{O}$ é alternada mas não é associativa ou comutativa. Portanto $\mathbb{O} \oplus \mathbb{O}$ não é alternada e desse modo não pode ser uma álgebra normada.*

Proposição 4 (Hurwitz) *As únicas álgebras normadas sobre $\mathbb{R}$ são $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ e $\mathbb{O}$.*

Demonstração:

Considere uma álgebra normada B. Seja $A_1 = \Re B \cong \mathbb{R}$, então ou $A_1 = B$ ou existe $\epsilon_1 \in \Im B = A_1^{\perp}$ com $|\epsilon_1|^2 = 1$.

Considere $A_2 := A_1 + \epsilon_1 A_1 \subseteq B$. Temos $A_2 \cong A_1 \oplus A_1 \cong \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} = \mathbb{C}$, assim se $A_2 = B$, nossa demonstração está completa.

Caso contrário, existe $\epsilon_2 \in A_2^{\perp}$ com $|\epsilon_2|^2 = 1$. Considere $A_3 := A_2 + \epsilon_2 A_2 \cong A_2 \oplus A_2 \cong$ **H**. Então $B = A_3$ ou existe $\epsilon_3 \in A_3^{\perp}$ com $|\epsilon_3|^2 = 1$.

Finalmente, considere $A_4 := A_3 + \epsilon_3 A_3 \cong A_3 \oplus A_3 \cong \mathbb{O}$. Então $B = A_3 \cong \mathbb{O}$ pois caso contrário o mesmo procedimento produziria uma subalgebra de B isomorfa a $\mathbb{O} \oplus \mathbb{O}$. Mas sabemos que $\mathbb{O} \oplus \mathbb{O}$ não é uma álgebra normada e isto é uma contradição.

$\odot$

Proposição 5 (Artin) *Qualquer subalgebra de $\mathbb{O}$, gerada por dois elementos de $\mathbb{O}$ é associativa.*

Corolário 1 *As álgebras $\mathbb{O}$, $\mathbb{H}$, $\mathbb{C}$ e $\mathbb{R}$ são normadas.*

$$|xy|^2 = (xy)(\overline{xy}) = (xy)(\overline{y}\overline{x}) = xy\overline{y}\overline{x} = |y|^2|x|^2 \quad \forall x, y \in \mathcal{O}.$$

O processo de Cayley-Dickson para construção de novas álgebras pode ser continuado a partir dos octônios produzindo álgebras de dimensão 16, 32, etc. Entretanto, nenhuma delas poderá ser mais de divisão, associativa ou normada. Com efeito, em Baez [BJC] é demonstrado que na álgebra de dimensão 16, obtida pelo processo, tem o conjunto de seus divisores de zero de norma unitária formando um subsespaço isomorfo ao Grupo de Lie excepcional G_2 que apresentamos e discutimos abaixo.

O produto interno de uma álgebra normada B é dado por $(x, y) = \Re x\overline{y}$. Vamos definir um produto cross $\times : B \times B \to \Im B$ em $\mathbb{R}^7$ do seguinte modo:

$$x \times y = \Im(\overline{y}x) = \frac{1}{2}(\overline{y}x - \overline{x}y) = -\frac{1}{2}(\overline{x}y - \overline{y}x) = -\Im(\overline{x}y).$$

Observe que esta aplicação é bilinear e alternada ($x \times x = 0$). Fazendo a restrição deste produto ao subconjunto $\Im B$ obtemos $\times : \Im B \times \Im B \to \Im B$.

Considerando $B = \mathbb{H}$ nós temos $\Im B \cong \mathbb{R}^3$ o qual nos dá $\times : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, que é o produto vetorial usual de $\mathbb{R}^3$.

Por outro lado, considerando $B = \mathbb{O}$, temos $\Im B \cong \mathbb{R}^7$ produzindo um produto vetorial $\times : \mathbb{R}^7 \times \mathbb{R}^7 \to \mathbb{R}^7$, no espaço vetorial $\mathbb{R}^7$. Este produto vetorial satisfaz a seguinte propriedade fundamental:

$$u \times (v \times w) + (u \times v) \times w = 2(u, w)v - (u, v)w - (w, v)u. \tag{1}$$

e a partir dele, podemos definir um **produto triplo escalar** por $(u \times v, w)$ o qual é anti-simétrico. Em particular, $(u \times v, u) = 0$, ou seja, o vetor $u \times v$ é perpendicular a ambos vetores u e v.

O Grupo de Lie excepcional G_2 pode então ser obtido como o grupo de automorfismos de $\mathbb{O}$, ou seja,

$$G_2 = \{g \in GL_8(\mathbf{R}) : g(xy) = g(x)g(y) \ \ \forall x, y \in \mathcal{O}\}.$$

Observemos que

$$x \in \Im\mathbb{O} \Longleftrightarrow x^2 \in \Re\mathbb{O}^- \cong \mathbb{R}^-.$$

Portanto

$$g(x) \in \Im\mathbb{O} \Longleftrightarrow x \in \Im\mathbb{O}.$$

e assim, por linearidade

$$g(\overline{x}) = \overline{g(x)}.$$

Portanto g é uma isometria, uma vez que

$$|g(x)|^2 = g(x)\overline{g(x)} = g(x)g(\overline{x}) = g(x\overline{x}) = g(|x|^2) = |x|^2 g(1) = |x|^2.$$

Em outras palavras, G_2 é subgrupo de $O(8)$.

Notemos que cada elemento $g \in G_2$ age trivialmente sobre $\mathbb{R} = \Re\mathbb{O} \subset \mathbb{O}$, i.e. $g(r) = r\ \forall r \in \mathbb{R}$. Assim, nós podemos considerar g como uma aplicação de $\Im\mathbb{O}$ em $\Im\mathbb{O}$. E portanto G_2 é um subgrupo do grupo ortogonal $O(7)$ agindo sobre $\Im\mathbb{O} \cong \mathbb{R}^7$.

Por outro lado, uma vez que G_2 é conexo e contém a matriz identidade, temos que G_2 não é apenas subgrupo de $O(7)$ mas sim de $SO(7)$. Disto segue-se que G_2 pode ser considerado como o grupo de automorfismos da estrutura $(\mathbb{R}^7, \times)$ uma vez que $g(ab) = g(a)g(b)$ implica $g(a \times b) = g(a) \times g(b)$.

Definição 4 *Uma* **base-$\mathbf{G_2}$** *de* $\mathbb{R}^7$ *é uma base ortonormal* $\{f_1, \ldots, f_7\}$ *de* $\mathbb{R}^7$ *tal que*

$$f_3 = f_1 \times f_2,\ f_5 = f_1 \times f_4,\ f_6 = f_2 \times f_4,\ f_7 = f_3 \times f_4.$$

Portanto, se f_1, f_2, f_4 são vetores unitários e ortogonais tais que $f_4 \perp f_1 \times f_2$ então f_1, f_2, f_4 determina uma única G_2-base, ou seja a condição extra de ortogonalidade possibilita determinar uma base para o espaço 7-dimensional a partir de 4 vetores cumprindo as condições acima.

Exemplo 3 *A base canônica euclideana* $\{e_1, \ldots, e_7\}$ *of* $\mathbb{R}^7$ *é uma base-G_2.*

Proposição 6 *A estrutura* $(\mathbb{R}^7, \times)$ *é gerada pelos vetores* f_1, f_2, f_4 *subordinados às relações:*

$$f_i \times (f_j \times f_k) + (f_i \times f_j) \times f_k = 2\delta_{ik} f_j - \delta_{ij} f_k - \delta_{jk} f_i.$$

Em particular, qualquer subalgebra de $\mathbb{R}^7$ *deve ter dimensão 0,1,3 or 7.*

Uma base-G_2 tem a seguinte tábua de multiplicação:

$$f_i \times f_j \ = \ \begin{array}{c||c|c|c|c|c|c|c} i\backslash j & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \hline\hline 1 & 0 & f_3 & -f_2 & f_5 & -f_4 & -f_7 & f_6 \\ \hline 2 & -f_3 & 0 & f_1 & f_6 & f_7 & -f_4 & -f_5 \\ \hline 3 & f_2 & -f_1 & 0 & f_7 & -f_6 & f_5 & -f_4 \\ \hline 4 & -f_5 & -f_6 & -f_7 & 0 & f_1 & f_2 & f_3 \\ \hline 5 & f_4 & -f_7 & f_6 & -f_1 & 0 & -f_3 & f_2 \\ \hline 6 & f_7 & f_4 & -f_5 & -f_2 & f_3 & 0 & -f_1 \\ \hline 7 & -f_6 & f_5 & f_4 & -f_3 & -f_2 & f_1 & 0 \end{array}$$

Para quaisquer duas bases-G_2, digamos, $\{f_1, \ldots, f_7\}$ e $\{\tilde{f}_1, \ldots, \tilde{f}_7\}$ existe um único elemento $g \in G_2$ tal que $gf_i = \tilde{f}_i$ (simplesmente definimos g pela condição $gf_i = \tilde{f}_i$ e verificamos que este elemento está em G_2).

Também vemos que o elemento $g \in G_2$ que leva a base $\{e_1, \ldots, e_7\}$ na base $\{f_1, \ldots, f_7\}$ pode ser representado, na base canônica, pela matriz

$$(f_1 | \ldots | f_7) \in SO(7).$$

Neste ponto é importante perceber que a estrutura algébrica $(\mathbb{R}^7, \times)$ induz uma estrutura adicional na esfera $S^6 \subset \mathbb{R}^7$ do seguinte modo. Para cada ponto $p \in S^6$, consideramos a aplicação $J_p : T_pS^6 \to T_pS^6$ dada por $J_p(v) = p \times v$.

As propriedades do produto $(\mathbb{R}^7, \times)$ mencionadas anteriormente nos dão de imediato que o tensor J cumpre a condição $J_p^2 = -I$ e assim com um pouco mais de geometria diferencial podemos obter (S^6, J) como uma variedade 6-dimensional munida de estrutura quase-complexa e quase khaleriana. Um dos estudos mais belos envolvendo esta estrutura é o das curvas quase-complexas de S^6 que são definidas como superfícies de S^6 cujos planos tangentes são invariantes sob ação de J. Estas curvas juntamente com a estrutura aqui apresentada são estudados em Bolton-Woodward [BW1].

Bibliografia

[BJC] Baez, John C. University of California, Departament of Mathematics - http://math.ucr.edu/home/baez/Octonions/node1.html

[BW1] J.Bolton, L.M.Woodward - Almost complex curves of constant curvature in the nearly K"ahler 6-sphere, Geometry and Topology of Submanifolds V, World Scientific, (1993) 54-67.

[HL] Harvey, Lawson - Calibrated Geometries, Acta Math. **148**, 47-157

[Ward] Ward, J.P. - Quaternions and Cayley numbers, Kluber Academic Publishers, 1997.

Prof. Dr. José Kenedy Martins.
Universidade Federal do Amazonas.
akay333@gmail.com
Fone 55-92-9122-8157